Kalkulus tizennyolcadik feladatsor

Határozott integrál, helyettesítéses integrál

1. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat! *(Kónya 5.4 fejezet)*

   a) $\int\limits_{-1}^{2} x^2 - 1\,\mathrm{dx}$

   b) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{dx}$ (Mo: Kónya 92.o.)

   c) $\int\limits_{0}^{2} \mathrm{e}^{|2x-1|}\,\mathrm{dx}$ (Mo: Kónya 93.o.)

   d) $\int\limits_{-1}^{2} |x^2 - 3x|\,\mathrm{dx}$

   e) $\int\limits_{0}^{3} \mathrm{sign}(x^2 - 4)\,\mathrm{dx}$

   Megoldás:

   a) Kihasználjuk, hogy függvények összegét lehet tagonként integrálni.

   $$\int_{-1}^{2} x^2 - 1\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{dx} + \int_{-1}^{2} -1\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} + [-x]_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} + (-2) - 1 = 0$$

   d) Az integrált felbontjuk két intervallumra: a $(-1,0)$ intervallumon $x^2 - 3x > 0$, illetve a $(0,2)$ intervallumon $x^2 - 3x < 0$, ezért a megfelelő előjel beírásával az abszolút érték elhagyható.

   $$\int_{-1}^{2} |x^2 - 3x|\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{0} |x^2 - 3x|\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{2} |x^2 - 3x|\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{0} x^2 - 3x\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{2} -(x^2 - 3x)\,\mathrm{dx} =$$

   $$\int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{dx} + \int_{-1}^{0} -3x\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{2} -x^2\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{2} 3x\,\mathrm{dx} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} + \left[\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2} =$$

   $$0 - \frac{(-1)^3}{3} - 0 + \frac{3}{2}(-1)^2 - \frac{2^3}{3} + 0 + \frac{3}{2}2^2 - 0 = \frac{31}{6}$$

2. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat! *(Kónya 5.4 fejezet)*

   a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{dx}$

   b) $\int\limits_{-5}^{5} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx}$

   c) $\int\limits_{-2}^{2} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} =?$

Megoldás:

a) Az integrált felbontjuk a $(-\pi, 0)$ és $(0, \pi)$ intervallumokra. $cos^2(x)$ páros függvény, ezért a két intrvallumon meg fog egyezni az integrál. Az 1//b feladat alapján $\int\limits_0^\pi \cos^2(x)\,\mathrm{dx} = \pi/2$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{dx} = \int\limits_{-\pi}^{0} \cos^2(x)\,\mathrm{dx} + \int\limits_{+}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{dx} = 2\int\limits_{0}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{dx} = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

b) Az integrált felbontjuk a $(-5, 0)$ és $(0, 5)$ intervallumokra. $sin(x)e^{-x^2}$ páratlan függvény, mert egy páratlan és egy páros függvény szorzata, ezért a két intervallumon egymás -1-szerese lesz az integrál.

$$\int\limits_{-5}^{5} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \int\limits_{-5}^{0} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} + \int\limits_{0}^{5} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \int\limits_{-5}^{0} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} - \int\limits_{-5}^{0} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} = 0$$

3. Integrálás helyettesítéssel: *(Kónya 5.7 fejezet)*

a) Az $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel számolja ki:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C, \;\; C \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

b) Az $t = e^x$ helyettesítéssel számolja ki:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{dx}$$

c) Az $x = 2\cosh(t)$ helyettesítéssel számolja ki:

$$\int \sqrt{x^2 - 4}\,\mathrm{dx} = ?$$

(Mo: Kónya 100.o.)

d) Az $\mathrm{e}^{2x} = t$ helyettesítéssel számolja ki:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{6x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\,\mathrm{dx}$$

(Mo: Kónya 101.o.)

e) A $t = \sqrt{2 - 3x}$ helyettesítéssel számolja ki:

$$\int \frac{9x}{\sqrt{2 - 3x} + 1}\,\mathrm{dx}$$

(Mo: Kónya 102.o.)

f) A $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel számolja ki:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + x}\,\mathrm{dx}$$

(Mo: Kónya 102.o.)

g) A $t = e^x$ helyettesítéssel számolja ki:

$$\int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \,\mathrm{dx} = \int_1^{e^2} \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \,\mathrm{dt} = \int_1^{e^2} \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \,\mathrm{dt} = \left[\ln \frac{(t+1)^2}{|t|} \right]_{t=1}^{e^2} = -2(1+\ln(2)-\ln(1+e^2)).$$

h) A $t = \sqrt{5-4x}$ helyettesítéssel számolja ki:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \,\mathrm{dx}$$